1. Bac 2014 session de rattrapage

On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\left(xe^{x}-1\right)e^{x}$.

et soit $\left(C_f\right)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité de 2 cm) .

1. Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$; puis interpréter géométriquement le résultat . ... (0,75)
2. ..
   a. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ . ... (0,75)
   b. En déduire que : la courbe $\left(C_f\right)$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera sa direction . ... (0,5)
3. ..
   a. Montrer que : $f'(x)=e^{x}\left(e^{x}-1+2xe^{x}\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis vérifier que $f'(0)=0$. .... (1)
   b. Montrer que $e^{x}-1\geq 0$ pour tout x de $[0,+\infty[$ et que $e^{x}-1\leq 0$ pour tout x de $]-\infty,0]$ . ... (0,5)
   c. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0,+\infty[$ et la fonction f est décroissante sur $]-\infty,0]$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ . ... (1,25)
4. ..
   a. Montrer que l'équation : $f(x)=x$ admet une solution unique sur $[0;+\infty[$ α tel que $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ (on admettra que $\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}<1$) . ... (0,75)
   b. Construire la courbe $\left(C_f\right)$ de f dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (on admettra que la courbe de f possède un point d'inflexion , on ne le déterminera pas) . ... (0,75)
5. A l'aide d'une intégration par partie montrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx=\dfrac{1}{4}$. .... (0,75)
6. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe $\left(C_f\right)$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\dfrac{1}{2}$ . ... (1)

2. Bac 2015 session normale (sujet qui a été refait)

I. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^{x}-2x$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que la fonction g est décroissante sur $]-\infty,\ln 2]$ et la fonction f est croissante sur $[\ln 2,+\infty[$ . ... (0,75)
2. Vérifier que : $g(\ln 2)=2(1-\ln 2)$ puis déterminer le signe de $g(\ln 2)$ . ... (0,5)
3. En déduire que $g(x)>0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ . ... (0,5)

II. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}-2x}$.

Et soit $\left(C_g\right)$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité de 1 cm)

1.

a. ..Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$ (on remarquera $e^x-2x=x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)$) pour tout x de $\mathbb{R}^*$ . ... (1)

b. Interpréter géométriquement les deux résultats . ... (0,5)

2. ..

a. Montrer que : $f'(x)=\frac{(1-x)e^x}{(e^x-2x)^2}$. pour tout x de $\mathbb{R}^*$ . ... (0,75)

b. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. (0,75)

c. Montrer que : $y=x$ est l'équation de la droite (T) tangente à la courbe (C_f) au point O origine du repère . ... (0,75)

3. Construire la courbe (C_f) de f dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on prend $\frac{1}{e-2}\approx 1,4$ et on admettra que la courbe de f admet deux points d'inflexions l'une a pour abscisse appartient à $]0,1[$ et l'autre a pour abscisse supérieure à $\frac{3}{2}$) . ... (0,75)

4. ..

a. Montrer que : $xe^{-x}\le\frac{x}{e^x-2x}\le\frac{1}{e-2}$ pour tout x de $[0,+\infty[$ . ... (0,75)

b. A l'aide d'une intégration par partie montrer que $\int_0^1 xe^{-x}dx=1-\frac{2}{e}$ . ... (0,75)

c. Soit en cm^2 $A(E)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

montrer que $1-\frac{2}{e}\le A(E)\le\frac{1}{e-2}$ .... (0,75)

III. Soit la fonction h définie sur $]-\infty,0]$ par : $h(x)=f(x)$.

1. Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera . ... (0,5)

2. Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $(C_{h^{-1}})$ de la fonction h^{-1} . ... (0,5)

IV. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=-2$ et $u_{n+1}=h(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que : $u_n\le 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$ . ... (0,5)

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante (on remarquera graphiquement que $h(x)\ge x$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty,0]$) . ... (0,75)

3. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer la limite de la suite (u_n) . ... (0,75)

3. Bac 2016 session normale

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^x$.

et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 1 cm) .

I. ..

1. ..

a. Montrer que : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ . ... (0, 25)

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$ (0, 5)

2. ..

a. Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ . ... (0, 5)

b. Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat . ... (0, 5)

3. ..

a. Montrer que : $f'(x) = 2(e^x - 1)^2$ pour tout x de $\mathbb{R}$ . ... (0, 5)

b. dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. (remarquer que $f'(0) = 0$) . ... (0, 25)

c. montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]1, \ln 4[$ tel que $f(\alpha) = 0$ . ... (0, 75)

4. ..

a. Montrer que : la courbe (C_f) est située au dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]\ln 4; +\infty[$ est au dessous de la droite (D) $]\ln 4; +\infty[$ sur l'intervalle $]-\infty; \ln 4[$ . ... (0, 5)

b. Montrer que : la courbe (C_f) admet un point d'inflexion unique de coordonnées $(0, -5)$ . ..... (0, 5)

c. Construire la droite (D) et la courbe (C_f) de f dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on prend $\ln 4 \approx 1,4$ et $\alpha \approx 1,3$) . ... (0, 75)

5. ..

a. Montrer que : $\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x)dx = -\frac{9}{2}$ . ... (0,5)

b. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et la droite (D) et l'axe des ordonnées et le droite d'équation $x = \ln 4$ . ... (0,75)

II. ..

1. ..

a. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' + 2y = 0$ . ... (0, 5)

b. Déterminer la solution g de l'équation (E) vérifiant $g(0) = -3$ et $g'(0) = -2$ . ... (0, 5)

2. Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]\ln 4; +\infty[$ par $h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x)$.

a. Montrer que : la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} et que h^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$ . .... (0,75)

b. Vérifier que : $h(\ln 5) = \ln 5$ puis determiner $(h^{-1})'(\ln 5)$ . ... (0,75)

4. Bac 2017 session de rattrapage

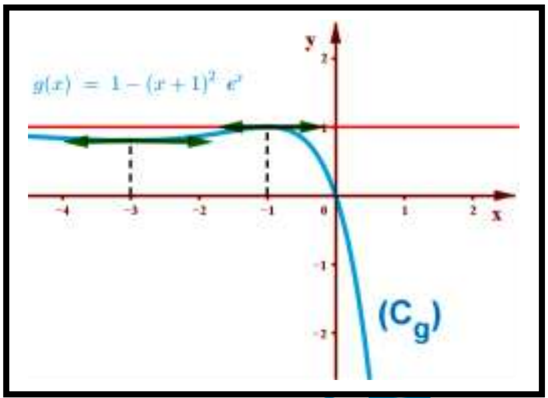
On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - (x+1)^2 e^x$.

I. ..

1. Vérifier que : $g(0) = 0$ . ... (0,25)

2. A partir de la courbe représentative (C_g) de la fonction g (voir figure ci-contre) : ……………………………… (1)

- Montrer que : $g(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à $]-\infty, 0]$
- Montrer que : $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$



II. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x+1-(x^2+1)e^x$.

Et soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 2 cm) .

1. ..

a. Vérifier que : $f(x) = x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
……………………………………………………………………………… (0,75)

b. Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$ en déduire que : la droite (D) d'équation $y = x+1$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage $-\infty$. ……………………………………… (0,5)

c. Montrer que : la courbe (C_f) est en dessous de la droite (D) . ……………………………… (0,25)

2. ..

a. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (on pourra écrire $f(x)$ sous la forme $x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$ (0,5)

b. Montrer que : la courbe (C_f) admet , au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on déterminera la direction . ……………………………………………………… (0,25)

3. ..

a. Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$. ……………………………… (0,75)

b. Montrer que la fonction f est croissante sur $]-\infty, 0]$ et la fonction f est décroissante sur $[0, +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. ……………………………… (0,75)

c. Montrer que : la courbe (C_f) admet deux points d'inflexion d'abscisses -3 et -1 . ………… (0, 75)

4. Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l a droite (D) et la courbe (C_f) (on prend $f(-3) \approx -2,5$ et $f(-1) \approx -0,75$). ……………………………………………………… (1)

5. ..

a. Vérifier que : $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$. puis montrer que $\int_{-1}^{0} xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$. ……………………………………… (0,5)

b. Montrer , à l'aide d'une intégration par parties que $\int_{-1}^{0} (x^2+1)e^x dx = 3\left(1-\frac{2}{e}\right)$. ……………… (0,75)

c. Calculer , en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et la droite (D) , et l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=-1$ . ... (0,5)

5. BAC 2018 SESSION NORMALE

Soit la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x-x^2+3x-1$.

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction g:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

I. ..

1. Vérifier que : $g(0)=0$ . ... (0,25)

2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty,0]$ et $[0,+\infty[$ . ... (0,5)

II. Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x^2-x)e^{-x}+x$.

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 1 cm) .

1. ..

a. Vérifier que : $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}-\dfrac{x}{e^x}+x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ . .... (0,5)

b. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$, en déduire que: la courbe (C_f) admet une asymptote (D) au voisinage $+\infty$ d'équation $y=x$ . ... (0,75)

c. Vérifier que : $f(x)=\dfrac{x^2-x+xe^x}{e^x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ . ... (0,5)

d. Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ et interpréter le résultat géométriquement . ... (0,5)

2. ..

a. Montrer que : $f(x)-x$ et x^2-x ont le même signe pour tout x de $\mathbb{R}$ . ... (0,25)

b. En déduire que : (C_f) est au dessus de (D) sur chacun des intervalles $]-\infty,0]$ et $[1,+\infty[$ et en dessous de (D) sur l'intervalle $[0,1]$ . ... (0,5)

3. ..

a. Montrer que : $f'(x)=g(x)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ . ... (0,75)

b. En déduire que la fonction f est décroissante sur $]-\infty,0]$ et la fonction f est croissante sur $[0,+\infty[$ . ... (0,5)

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ . ... (0,25)

4. ..

a. Vérifier que : $f''(x)=(x^2-5x+4)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ . ... (0,25)

b. En déduire que : la courbe (C_f) admet deux points d'inflexion d'abscisses respectives 1 et 4 . (0, 5)

5. Construire (D) et (C_f) dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on prend $f(4)\approx 4,2$). .... (1)

6.

a. Vérifier que : $H : x \mapsto (x^2+2x+2)e^{-x}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. puis en déduire que $\int_0^1 x^2e^{-x}dx = \frac{2e-5}{e}$ . ... (0,5)

b. A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_0^1 xe^{-x}dx = \frac{e-2}{e}$. .... (0,75)

c. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C_f) et (D) et le droite (D) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ . ... (0,75)

III. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que : $0 \le u_n \le 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (on pourra utiliser le résultat de la question II 3) b-). .... (0,75)

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante . ... (0,5)

3. En déduire que (u_n) est convergente .et déterminer sa limite. .... (0,75)

6. Bac 2019 session de rattrapage

Première Partie :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$.

et (C_f) a courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 1 cm) .

1. .

a. vérifier que : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ puis interpréter le résultat géométriquement . ... (0,5)

b. vérifier que : $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement . ... (0,5)

2. ..

a. Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ . ... (0,5)

b. Montrer que : la courbe (C_f) admettra une branche parabolique de direction l'asymptotique l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ . ... (0,5)

3. ..

a. Montrer que : pour tout x de $\mathbb{R}^*$ $f'(x) = \frac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$ . ... (0,75)

b. Vérifier que : pour tout x de $\mathbb{R}$: $x^2-2x+4>0$. .... (0,25)

c. Montrer que f est strictement décroissante sur $]0,2]$ et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $[2,+\infty[$ . ... (0,75)

d. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ . ... (0,5)

4. Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. .... (1)

5. ..

a. Vérifier que : la fonction $H\ :\ x \mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ est une fonction primitive de la fonction $h\ :\ x \mapsto \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ sur l'intervalle $[2,4]$ . ... (0,5)

b. Vérifier que : $f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32\frac{(x-1)}{x^2}e^{x-4}$. .... (0,25)

c. Calculer l'intégral : $\int_2^4 e^{x-4}dx$ .... (0,5)

d. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$ . ... (0,75)

Deuxième Partie :

1. On considère la fonction numérique g définie sur $[2,4]$ par : $g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2$.

a. Calculer : $g(4)$ . ... (0,25)

b. Vérifier que : pour tout x de $[2,4]$: $g(x) = -(x-4)^2 e^{x-4} + x^2(e^{x-4} - 1)$ . ... (0,5)

c. Vérifier que : pour tout x de $[2,4]$: $e^{x-4} - 1 \leq 0$ puis en déduire que pour tout x de $[2,4]$: $g(x) \leq 0$ .... (0,5)

2. ..

a. Vérifier que : pour tout x de $[2,4]$: $f(x) - x = \frac{x-2}{x^2}g(x)$ . ... (0,5)

b. En déduire que : pour tout x de $[2,4]$, $f(x) \leq x$ . ... (0,25)

3. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer par récurrence que : pour tout n de $\mathbb{N}$ $2 \leq u_n \leq 4$ . ... (0,5)

b. Déterminer la monotonie de la suite (u_n) , puis en déduire que (u_n) est convergente . ..... (0,5)

c. Calculer la limite de la suite (u_n) . ... (0,75)